

109 Tests und Konfidenzintervalle beim Korrelationskoeffizienten

Bei der zweidimensionalen Normalverteilung ist der Korrelationskoeffizient r einer Stichprobe ein Schätzwert für den Korrelationskoeffizienten ϱ der zugehörigen Grundgesamtheit [vgl. (106.4) und (107.4)]. In diesem Falle kann man die Hypothese $\varrho = 0$ gegen eine Alternative, etwa $\varrho > 0$, testen, wie Tab. 109.1 zeigt. Die Anwendung folgt daraus, daß t_0 einer Zufallsvariablen entspricht, die bei Richtigkeit der Hypothese eine t -Verteilung mit $n - 2$ Freiheitsgraden besitzt, wie R. A. FISHER (Biometrika 10, 1912, 307) bewiesen hat. In diesem Falle sollte t_0 klein sein. Deshalb verwirft man bei zu großem t_0 die Hypothese.

Tabelle 109.1. Test der Hypothese $\varrho = 0$ gegen die Alternative $\varrho > 0$ bei der zweidimensionalen Normalverteilung

1. Schritt. Man wähle eine Signifikanzzahl α (5%, 1% oder dgl.).
2. Schritt. Man bestimme die Lösung c der Gleichung
(109.1) $P(T \leq c) = 1 - \alpha$
aus der Tafel 8 der t -Verteilung mit $n - 2$ Freiheitsgraden (siehe Anhang 6).
3. Schritt. Man berechne den Korrelationskoeffizienten r der gegebenen Stichprobe $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.
4. Schritt. Man berechne
(109.2) $t_0 = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$
Ist $t_0 \leq c$, so wird die Hypothese $\varrho = 0$ angenommen. Ist $t_0 > c$, so wird sie verworfen.

Beispiel 109.1. Unter der Annahme, daß die Grundgesamtheit, aus der die Stichprobe in Tab. 106.1 stammt, eine zweidimensionale Normalverteilung besitzt, teste man die Hypothese $\varrho = 0$ gegen die Alternative $\varrho > 0$.

1. Schritt. Wir wählen die Signifikanzzahl $\alpha = 5\%$.

2. Schritt. Es ist $n = 100$, also $n - 2 = 98$. Tafel 8 hat keine entsprechende Spalte. Für 100 Freiheitsgrade entnehmen wir der Tafel als Lösung der Gleichung (109.1) mit $1 - \alpha = 0,95$ den Wert $c = 1,66$. Diesen Wert können wir beim Test verwenden, wie ein Blick auf die in Tafel 8 links und rechts benachbarten Werte zeigt.

3. Schritt. Gemäß Beispiel 106.1 ist $r = 0,674$.

Schritt. So wird

$$t_0 = 0,674 \sqrt{\frac{98}{1 - 0,674^2}} = 9,03.$$

Da $t_0 > c$. Die Hypothese wird also verworfen.

Aus (109.2) und Tafel 8 ergibt sich die Abb. 109.1, mit deren Hilfe den betrachteten Test auch auf graphische Weise durchführen kann. Liegt der Punkt mit den Koordinaten n und r oberhalb der Kurve, so verwirft man die Hypothese. Anderenfalls nimmt man sie an. Bemerkenswert ist in Abb. 109.1, daß sich der Annahmehereich für kleinen Stichprobenumfang n bis zu relativ großen Werten von r erstreckt. Wäre im vorigen Beispiel n sehr klein, etwa $n = 5$, und $r = 0,674$ gewesen, so hätten wir die Hypothese $\varrho = 0$ trotz des relativ großen Wertes von r annehmen müssen. Dies erkennt man sofort aus Abb. 109.1.

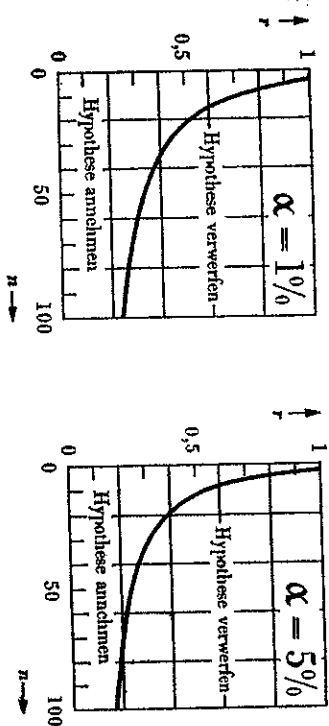


Abbildung 109.1. Test der Hypothese $\varrho = 0$ gegen die Alternative $\varrho > 0$

Wir zeigen nun, wie man bei der zweidimensionalen Normalverteilung Konfidenzintervalle für den Korrelationskoeffizienten ϱ bestimmen kann.

Aus dem Korrelationskoeffizienten r der Stichprobe berechnen wir den Hilfswert

$$(109.3) \quad z_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Wie R. A. FISHER [Metron 1, 1921, 3] bewiesen hat, ist dies ein Schätzwert für den Mittelwert

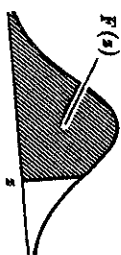
$$\mu^* = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\varrho}{1-\varrho}$$

Zum Kolmogorov-Smirnow-Test

Tafel 7. Lösungen e der Gleichung (86.1)

 n = Stichprobenumfang

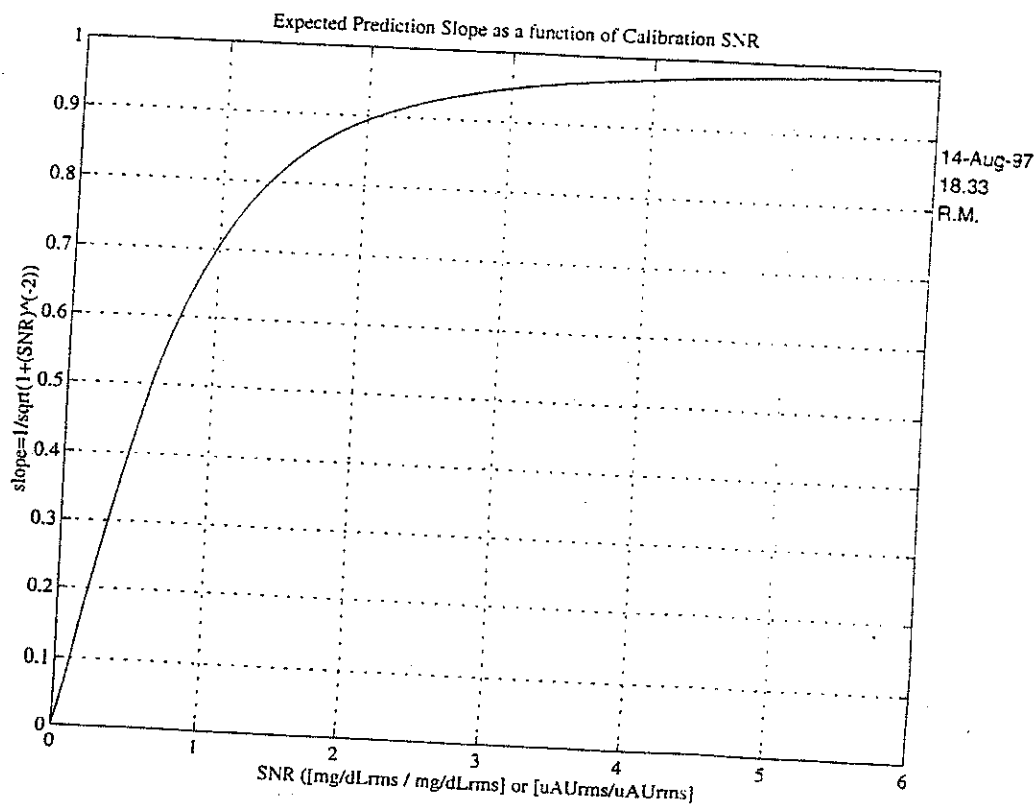
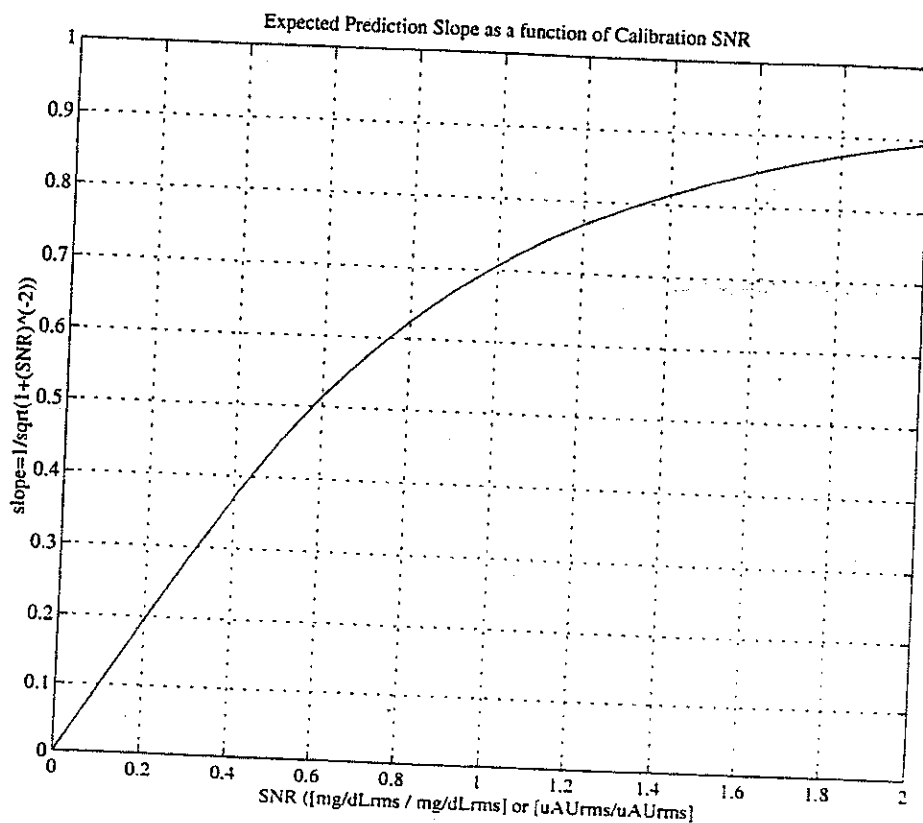
n	$\alpha = 20\%$	$\alpha = 10\%$	$\alpha = 5\%$	$\alpha = 2\%$	$\alpha = 1\%$
1	0,900	0,850	0,875	0,900	0,900
2	0,884	0,828	0,842	0,884	0,884
3	0,865	0,806	0,820	0,865	0,865
4	0,847	0,785	0,800	0,847	0,847
5	0,833	0,769	0,784	0,833	0,833
6	0,820	0,753	0,768	0,820	0,820
7	0,808	0,738	0,753	0,808	0,808
8	0,796	0,724	0,739	0,796	0,796
9	0,785	0,711	0,726	0,785	0,785
10	0,774	0,699	0,714	0,774	0,774
11	0,763	0,688	0,703	0,763	0,763
12	0,752	0,677	0,692	0,752	0,752
13	0,741	0,666	0,681	0,741	0,741
14	0,730	0,655	0,670	0,730	0,730
15	0,719	0,644	0,659	0,719	0,719
16	0,708	0,633	0,648	0,708	0,708
17	0,697	0,622	0,637	0,697	0,697
18	0,686	0,611	0,626	0,686	0,686
19	0,675	0,600	0,615	0,675	0,675
20	0,664	0,589	0,604	0,664	0,664
21	0,653	0,578	0,593	0,653	0,653
22	0,642	0,567	0,582	0,642	0,642
23	0,631	0,556	0,571	0,631	0,631
24	0,620	0,545	0,560	0,620	0,620
25	0,609	0,534	0,549	0,609	0,609
26	0,598	0,523	0,538	0,598	0,598
27	0,587	0,512	0,527	0,587	0,587
28	0,576	0,501	0,516	0,576	0,576
29	0,565	0,490	0,505	0,565	0,565
30	0,554	0,479	0,494	0,554	0,554
35	0,523	0,448	0,463	0,523	0,523
40	0,492	0,417	0,432	0,492	0,492
45	0,461	0,386	0,401	0,461	0,461
50	0,430	0,355	0,370	0,430	0,430
55	0,400	0,324	0,339	0,400	0,400
60	0,369	0,293	0,308	0,369	0,369
65	0,338	0,262	0,277	0,338	0,338
70	0,307	0,231	0,246	0,307	0,307
75	0,276	0,200	0,215	0,276	0,276
80	0,245	0,169	0,184	0,245	0,245
85	0,214	0,138	0,153	0,214	0,214
90	0,183	0,107	0,122	0,183	0,183
95	0,152	0,076	0,091	0,152	0,152
100	0,121	0,045	0,060	0,121	0,121

Student's t -Verteilung1.8. Werte von z zu gegebenen Werten
Verteilungsfunktion (92.8)Beispiel: Bei 9 Freiheitsgraden ist $F(z) = 0,95$ für $z = 1,88$.
 $F(-z) = 1 - F(z)$ 

		Anzahl der Freiheitsgrade									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,95	1,88	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,90	1,64	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,85	1,40	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,80	1,28	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,75	1,10	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,70	0,98	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,65	0,86	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,60	0,75	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,55	0,64	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,50	0,53	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,45	0,42	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,40	0,31	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,35	0,20	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,30	0,09	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,25	0,00	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,20	0,00	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,15	0,00	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,10	0,00	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,05	0,00	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26
0,00	0,00	0,00	0,29	0,28	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,26

		Anzahl der Freiheitsgrade									
		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0,95	1,80	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,90	1,64	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,85	1,40	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,80	1,28	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,75	1,10	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,70	0,98	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,65	0,86	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,60	0,75	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,55	0,64	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,50	0,53	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,45	0,42	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,40	0,31	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,35	0,20	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,30	0,09	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,25	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,20	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,15	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,10	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,05	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,00	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26

		Anzahl der Freiheitsgrade									
		22	24	26	28	30	40	50	100	200	∞
0,95	1,72	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,90	1,56	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,85	1,40	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,80	1,28	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,75	1,10	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,70	0,98	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,65	0,86	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,60	0,75	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,55	0,64	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,50	0,53	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,45	0,42	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,40	0,31	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,35	0,20	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,30	0,09	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,25	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,20	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,15	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,10	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,05	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
0,00	0,00	0,00	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26



$$SNR = \sqrt{\frac{1}{S^2} - 1}$$

Scatter:

Again, for the time-orthogonal case, the first term in Equation 1 can be expanded. Let us consider first the "prediction" of the original calibration set with our b vector. This results in the calibration scatter

$$4) \text{ SCATTER}_{\text{Corth}} = \frac{(Y^T Y) X_e (X_e^T X_e)^{-1} g}{1 + \text{SNR}^2}$$

The RMS scatter portion of the error is

$$5) \text{ SCATTER}_{\text{Corth rms}} = \text{SCATTER}_{\text{Corth}}^T \text{ SCATTER}_{\text{Corth}} = Y_{\text{rms}} \left[\frac{\text{SNR}}{1 + \text{SNR}^2} \right]$$

Y_{rms} is the RMS variation of the reference glucose values used in calibration. Referring to the real data above, this would lead us to expect, when "predicting" the calibration set, to see an improvement in RMS scatter from $0.5 * Y_{\text{rms}}$ to $0.37 * Y_{\text{rms}}$ as a result of averaging. Figure 2 summarizes the slope and scatter dependence on SNR when predicting the calibration set.

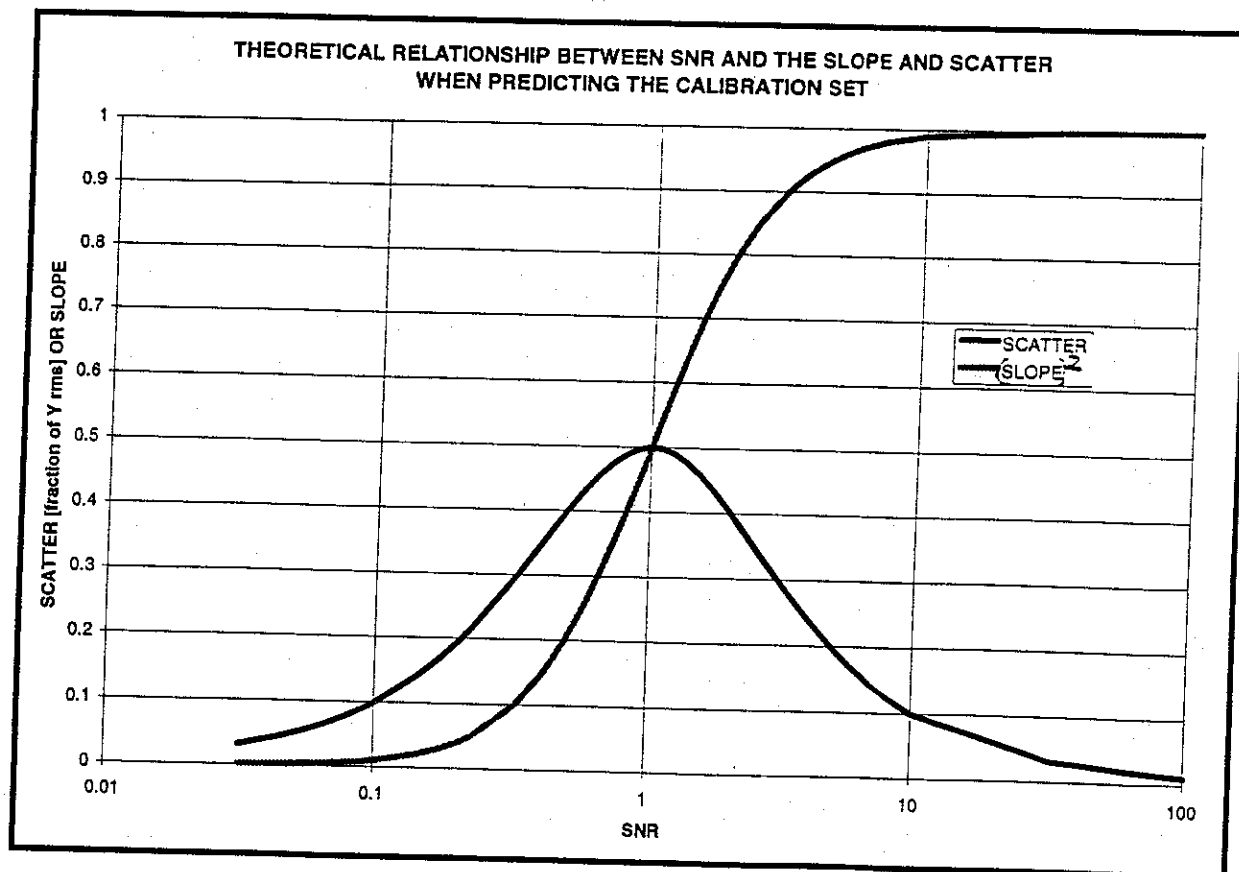
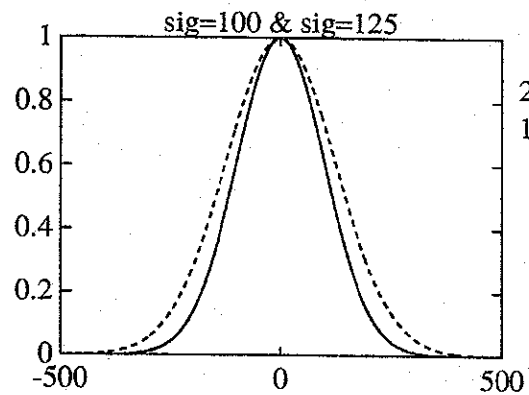
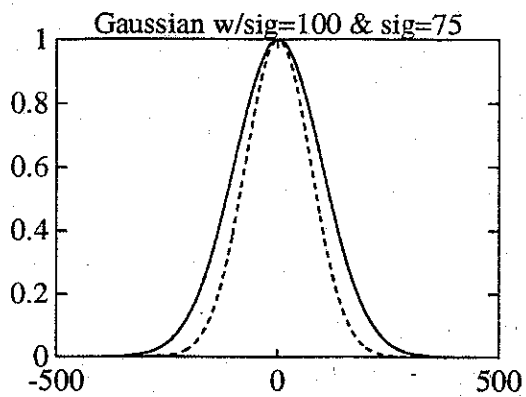
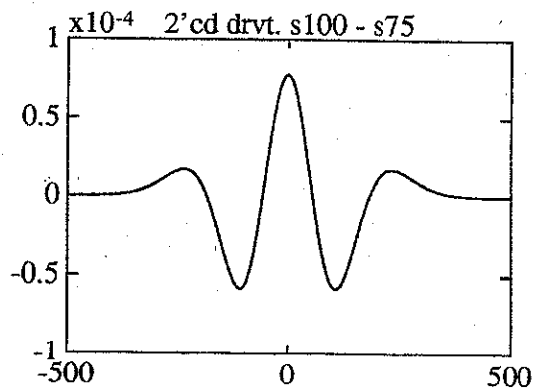
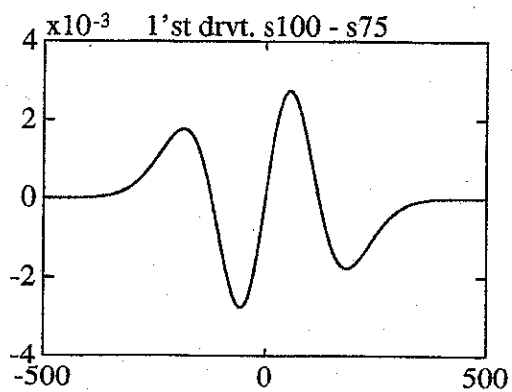
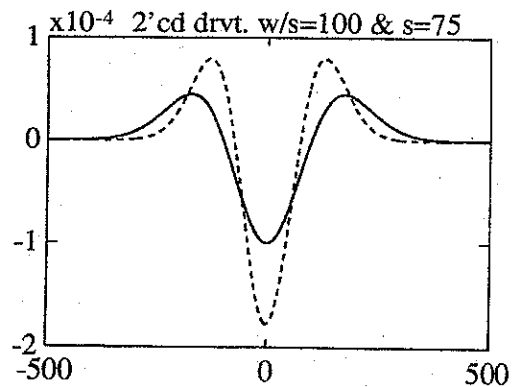
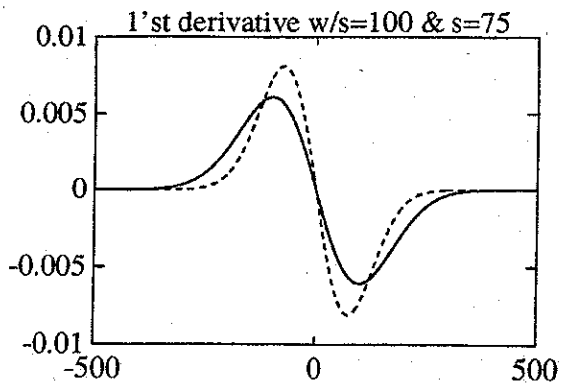
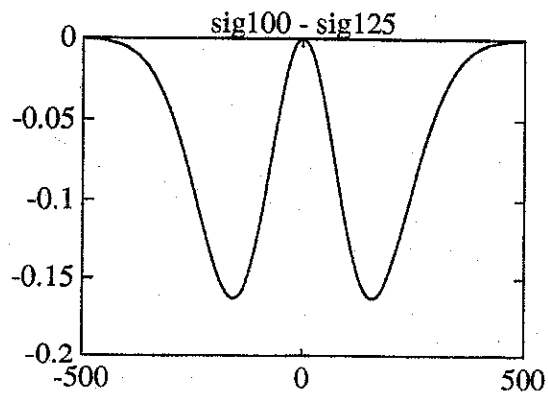
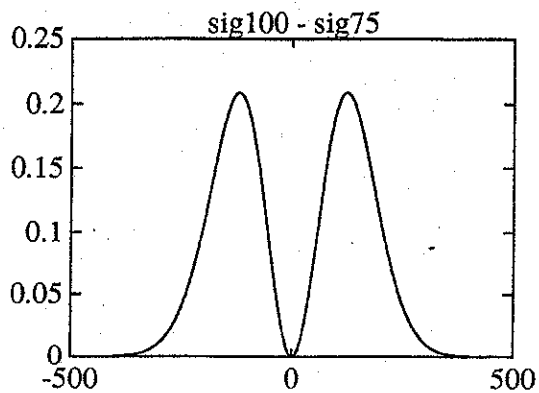
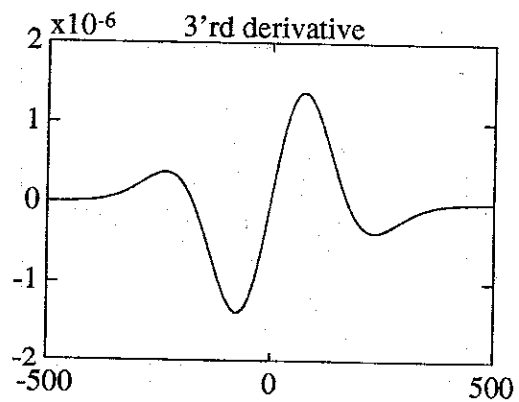
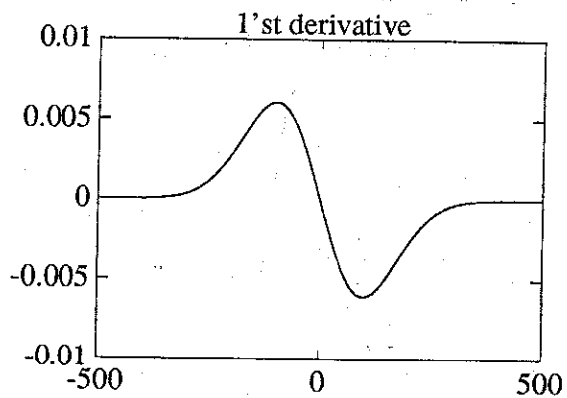
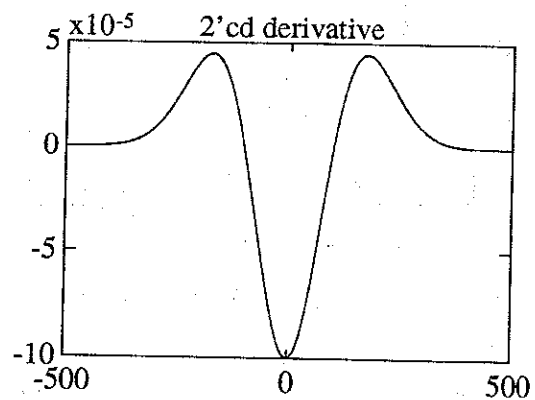
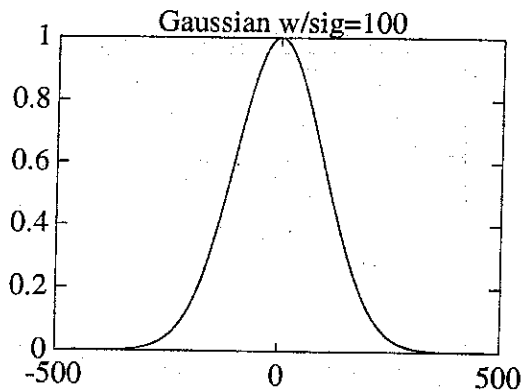
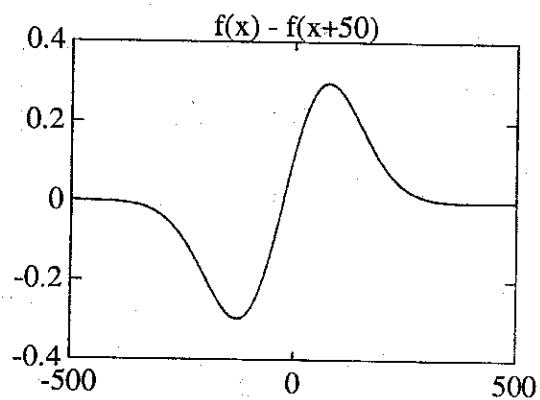
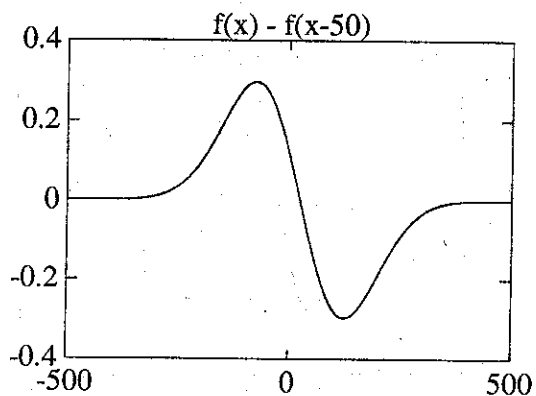
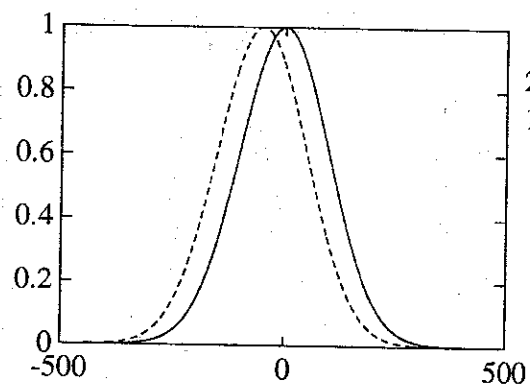
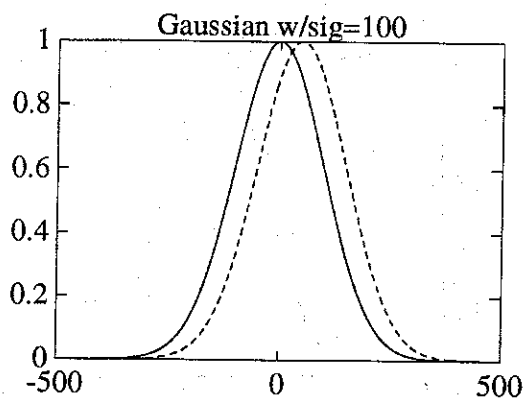


Figure 2: Prediction of calibration set. Slope and scatter dependence on SNR.



22-Feb-94
11.48





Binomial Distribution

generalization of the binomial to the case of k -fold mutually events each of which occurs with probability p_i , $i = 1, \dots, k$,

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1 \quad (28.5)$$

where the parameters are only enumerated up to $k-1$ since one parameter is fixed by (28.5).

The expectation values and variances are k -fold:

$$E(x_i) = np_i \quad (28.7)$$

and

$$\text{Var}(x_i) = \sigma_i^2 = np_i(1-p_i) \quad (28.8)$$

Exponential Distribution

encountered this in considering decay. In general, it has applications in life-testing problems and also to atomic and nuclear physics.

defined by the p.d.f.

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{for } 0 \leq x < \infty \quad (28.9)$$

$$\sigma^2(x) = \text{Var}(x) = \frac{1}{\lambda^2} \quad (28.11)$$

Weibull Distribution

tribution is a generalization of the normal, having three parameters in one. It is also used in life-testing studies where its parameters are fitted to particular situations.

Weibull p.d.f. is

$$f(x, b, c) = \frac{c}{b} \left(\frac{x-a}{b} \right)^{c-1} e^{-(x-a)/b^c} \quad (28.12)$$

$a \leq x$ and $0 < b, c$.

with the Gaussian distribution, the distribution may be transformed to a parameter distribution for purposes of tabulation and graphing.

$$y = \frac{x-a}{b} \quad (28.13)$$

$$= \frac{n!}{x_1! x_2! \cdots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k} \quad (28.6)$$

The mean and variance are given by

$$E(x) = \frac{1}{\lambda} \quad (28.10)$$

and

yields

$$W(y; c) = cy^{c-1} e^{-y^c} \quad y \geq 0 \quad c > 0 \quad (28.14)$$

This has the c.d.f.

$$W(y; c) = \int_0^y W(y; c) dy = 1 - e^{-y^c} \quad (28.15)$$

The expectation value is

$$E(y) = \Gamma(1 + c^{-1}) \quad (28.16)$$

where

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-y} y^{z-1} dy \quad z > 0$$

is the Gamma function discussed in Appendix III.

The variance is

$$\text{Var}(y) = \Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{c}\right) \quad (28.17)$$

The Log-Normal Distribution

This is the distribution of a random variable, x , whose logarithm is normally distributed, that is,

$$y = \ln x \quad \text{is} \quad N(\mu, \sigma^2) \quad (28.18)$$

The log-normal distribution* has been found useful in describing the distribution of incomes and other economic indices. In medicine it has been used to describe the distribution of recovery times from various illness, the survival times of bacteria in disinfectant solutions, and the weights and blood pressures of people.

We may relate the log-normal distribution to the normal convergence theorem by considering a variate X that is the result of a large number of independent influences each of which produces a small effect proportional to X . Each influence then, produces an effect such that

$$\frac{\Delta X}{X} = k = \Delta(\ln X)$$

The distribution resulting from a large number of independent influences, each producing a small constant effect, is normal, that is, $\ln X$ is normally distributed and X is log-normal.

The cumulative distribution function is

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \Pr[\ln X \leq \ln x] \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(\ln x - \mu)/\sigma} e^{-t^2/2} dt \quad (28.19)$$

*See, for example, J. Aitchison and J. A. C. Brown, *The Lognormal Distribution*, Cambridge University Press, New York, 1957.

The p.d.f. is obtained from

$$\text{LN}(x) = F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2} \quad x > 0 \quad (28.20)$$

We may get the expectation value

$$E(x) = e^{\mu + \sigma^2/2} \quad (28.21)$$

and the variance

$$\text{Var}(x) = e^{2\mu + 3\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (28.22)$$

The expectation value is not so useful for an asymmetric distribution. Often, more significant are such measures as the median, mode, and the geometric mean.

We note that the mode, obtained from setting

$$\frac{d}{dx} [\text{LN}(x)] = 0 \quad \text{is} \quad x_{\text{mode}} = e^{\mu - \sigma^2} \quad (28.23)$$

For discrete data believed to follow a logarithmic distribution, $x_1, x_2, \dots, x_n$, it is often useful to define the geometric mean

$$x_{\text{geometric mean}} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \\ = \exp \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right) \right] \quad (28.24)$$

(See the end of Chapter 7.)

The median is

$$x_{\text{med}} = e^{\mu} \quad (28.24a)$$

The F-Distribution

Consider that x_1 and x_2 are independent, and that each is chi-square distributed with n_1 and n_2 d.o.f., respectively. Then

$$F(n_1, n_2) = \frac{x_1/n_1}{x_2/n_2} \quad (28.25)$$

$f(F; n_1, n_2)$

$$= \frac{\Gamma(n_1 + n_2/2)}{\Gamma(n_1/2) \Gamma(n_2/2)} \left(\frac{n_1/n_2}{1 + n_1/n_2} \right)^{n_1/2} F^{n_1/2 - 1} (1 + F)^{-(n_1 + n_2)/2}$$

$$F > 0 \quad (28.26)$$

The mean of the F-distribution is

In fact, only a few characteristics of a density function are usually relevant, such as for instance, the position of the "center", the degree of asymmetry, the size of the "error bounds", the "correlations" between different parameters, and the behaviour of the density function "far from the center".

If hesitation exists in choosing the a priori error bars, it is of course best to be overconservative and to choose them very large. A conservative choice for correlations is to neglect them (see Figure 1.8 for an example). The behaviour of the density functions far from the center is only crucial if outliers may exist: the choice of functions tending too rapidly to zero (box-car functions or even Gaussian functions) may lead to inconsistencies; the solution to the problem (as defined in the next section) may not exist, or may senseless.

Usually the a priori states of information have the form of "soft bounds", the normal or log-normal density functions generally apply well to that case. If the normal function is thought to vanish too rapidly when the parameter's value tends to infinity, longer tailed functions may be used, such as for instance, the symmetric-exponential function (see box 1.2).

Box 1.3: The Log-normal probability density

It is defined by

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} s} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{1}{2s^2} \left(\log \frac{x}{x_0} \right)^2 \right] \quad (1)$$

Figure 1.9 shows some examples for $x_0 = 1$ and s respectively equal to 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, and 3.2.

The mode, median, and mean of $f(x)$ are respectively

$$m_0 = x_0 \exp(-s^2) \quad (f(x) \text{ maximum for } x = m_0)$$

$$m_1 = x_0$$

(2)

$$m_2 = x_0 \exp(s^2/2)$$

The mean deviation and standard deviation are respectively

$$\sigma_1 = x_0 \exp(s^2/2) (\operatorname{Erf}(1/s) - \operatorname{Erf}(-1/s))$$

(3)

$$\sigma_2 = x_0 \exp(s^2/2) (\exp(s^2) - 1)^{1/2}$$

(...)

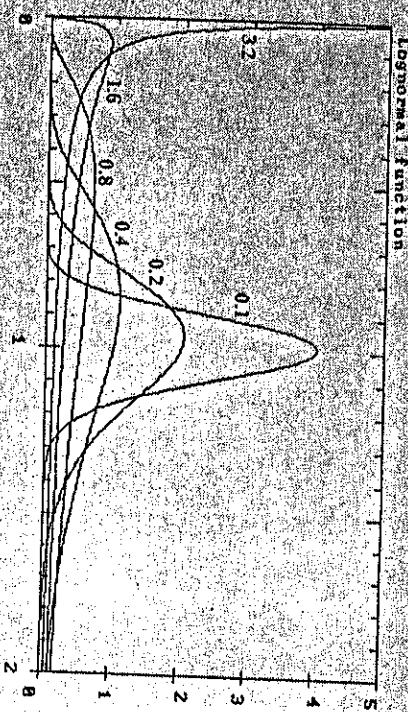


Figure 1.9: The Log-normal probability density.

where $\operatorname{Erf}(u)$ denotes the error function

$$\operatorname{Erf}(u) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^u dt \exp \left[-\frac{t^2}{2} \right]$$

The log-normal probability density is so called because the *logarithm* of the variable has a normal (Gaussian) probability density. For the change of variables

$$x = \beta \log \left[\frac{x}{\gamma} \right] \quad x = \gamma \exp \left[\frac{x}{\beta} \right] \quad (4)$$

transforms $f(x)$ into

$$f^*(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_0}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (5)$$

with

(...)

$$\sigma = s \beta \quad s = \frac{\sigma}{\beta} \quad (6a)$$

and

$$x_0^* = -\beta \log \left[\frac{x_0}{\gamma} \right] \quad x_0 = \gamma \exp \left[-\frac{x_0^*}{\beta} \right] \quad (6b)$$

In (4), the constant β is often $\log 10$, which corresponds to defining x^* by $x^* = \log_{10}(x/\gamma)$. The constant γ often corresponds to the physical unit used for x (see example 4.3). Alternatively, the particular choice

$$x^* = \frac{1}{s} \log \left[\frac{x}{x_0} \right] \quad x = x_0 \exp(s x^*)$$

leads to a Gaussian density with zero mean and unit standard deviation.

$$f^*(x^*) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \exp \left[-\frac{(x^*)^2}{2} \right]$$

Figure 1.9 suggests that, for given x_0 , when the "dispersion" s is very small, the log-normal probability density tends to a Gaussian function. This is indeed the case. For, when $s \rightarrow 0$, $f(x)$ takes significant values only in the vicinity of x_0 , and

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} s x_0} \exp \left[-\frac{1}{2s^2} \left[-1 + \frac{x}{x_0} - \dots \right]^2 \right]$$

$$\approx \frac{1}{(2\pi)^{1/2} (s x_0)} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(x - x_0)^2}{(s x_0)^2} \right] \quad (7)$$

If, for given x_0 , the dispersion s is very large, the log-normal probability density tends to a log-uniform probability density (i.e., proportional to $1/x$; see section 1.2.4). For any x not too close to the origin, the argument of the exponential in (1) can be taken as null, thus showing that, at the limit $s \rightarrow \infty$,

$$f(x) \approx \frac{1}{(2\pi)^{1/2} s x} \quad (8)$$

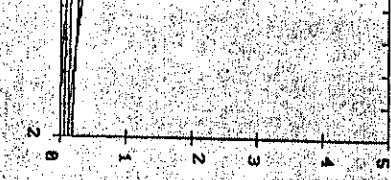
The convergence of (1) into (8) is not a uniform convergence, in the sense that while the function (8) tends to infinity when x tends to 0, the log-normal (1) takes the value 0 at the origin. But for values of x of the same order of magnitude as x_0 , the approximation (8) is adequate (for instance, for the values $x_0 = 1$, $s = 10$, the log-normal function

(4)

(5)

(4)

cause the logarithm density. For the



and the log-uniform function are indistinguishable (Figure 1.9).

As suggested in section 1.2.4, the log-normal probability density is often adequate to represent probability distributions for variables which by definition are constrained to be positive.

The reader will easily verify that if a variable x has a log-normal distribution, the variable $y = 1/x$ has the same distribution.

The function

$$f(x) = \frac{1}{2s} \frac{1}{\Gamma(1/p)} \frac{1}{x} \exp \left[-\frac{1}{p s^p} \left| \log \frac{x}{x_0} \right|^p \right] \quad (9)$$

transforms, under the change of variables (4), into the generalized Gaussian

$$f^*(x^*) = \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(1/p)} \exp \left[-\frac{1}{p} \frac{|x^* - x_0^*|^p}{\sigma^p} \right] \quad (10)$$

where σ and x_0^* are given by (6). This suggests that (9) can be referred to as the "generalized log-normal in the p norm sense".

1.4.3: Joint prior information in the $D \times M$ space

By definition, the a priori information on model parameters is independent of observations. The information we have in both model parameters and observable parameters can then be described in the $D \times M$ space by the joint density function

$$\rho(d, m) = \rho_D(d) \rho_M(m) \quad (1.59)$$

It may happen that part of the "a priori" information has been obtained from a first, rough analysis of the data set. Rigorously then, there exist correlations between d and m in $\rho(d, m)$, and equation (1.59) no longer holds. For a maximum of generality we thus have to assume the existence of a general probability density $\rho(d, m)$, not necessarily satisfying (1.59), and representing all the information we have in data and model parameters *independently* of the use of any theoretical information (which is described by the probability density $\Theta(d, m)$ introduced in section 1.3).

Hex	Dec	Screen
2Eh	46	.
2Fh	47	/
30h	48	0
31h	49	1
32h	50	2
33h	51	3
34h	52	4
35h	53	5
36h	54	6
37h	55	7
38h	56	8
39h	57	9
3Ah	58	:
3Bh	59	!
3Ch	60	<
3Dh	61	=
3Eh	62	>
3Fh	63	?
40h	64	@
41h	65	A
42h	66	B
43h	67	C
44h	68	D
45h	69	E
46h	70	F
47h	71	G
48h	72	H
49h	73	I
4Ah	74	J
4Bh	75	K
4Ch	76	L
4Dh	77	M
4Eh	78	N
4Fh	79	O
50h	80	P
51h	81	Q
52h	82	R
53h	83	S
54h	84	T
55h	85	U
56h	86	V
57h	87	W
58h	88	X
59h	89	Y
5Ah	90	Z
5Bh	91	[

Hex	Dec	Screen
5Ch	92	\
5Dh	93	]
5Eh	94	^
5Fh	95	_
60h	96	`
61h	97	a
62h	98	b
63h	99	c
64h	100	d
65h	101	e
66h	102	f
67h	103	g
68h	104	h
69h	105	i
6Ah	106	j
6Bh	107	k
6Ch	108	l
6Dh	109	m
6Eh	110	n
6Fh	111	o
70h	112	p
71h	113	q
72h	114	r
73h	115	s
74h	116	t
75h	117	u
76h	118	v
77h	119	w
78h	120	x
79h	121	y
7Ah	122	z
7Bh	123	{
7Ch	124	
7Dh	125	}
7Eh	126	~
7Fh	127	Δ
80h	128	Ç
81h	129	Ù
82h	130	Ê
83h	131	À
84h	132	â
85h	133	ä
86h	134	ä
87h	135	ç
88h	136	ë
89h	137	é



Sims
Learning
Center

ASCII Character Chart

Hex	Dec	Screen	Ctrl	Key
00h	0	␣		NUL
01h	1	␣		SOH
02h	2	␣		STX
03h	3	␣		ETX
04h	4	␣		EOT
05h	5	␣		ENO
06h	6	␣		ACK
07h	7	␣		BEL
08h	8	␣		BS
09h	9	␣		HT
0Ah	10	␣		LF
0Bh	11	␣		VT
0Ch	12	␣		FF
0Dh	13	␣		CR
0Eh	14	␣		SO
0Fh	15	␣		SI
10h	16	␣		DLE
11h	17	␣		DC1
12h	18	␣		DC2
13h	19	␣		DC3
14h	20	␣		DC4
15h	21	␣		NAK
16h	22	␣		SYN
17h	23	␣		ETB
18h	24	␣		CAN
19h	25	␣		EM
20h	26	→		␣
21h	27	←		␣
22h	28	↔		␣
23h	29	↔		␣
24h	30	↔		␣
25h	31	↔		␣
26h	32	↔		␣
27h	33	↔		␣
28h	34	↔		␣
29h	35	↔		␣
2Ah	36	↔		␣
2Bh	37	↔		␣
2Ch	38	↔		␣
2Dh	39	↔		␣
2Eh	40	↔		␣
2Fh	41	↔		␣
30h	42	↔		␣
31h	43	↔		␣
32h	44	↔		␣
33h	45	↔		␣
34h	46	↔		␣
35h	47	↔		␣
36h	48	↔		␣
37h	49	↔		␣
38h	50	↔		␣
39h	51	↔		␣
3Ah	52	↔		␣
3Bh	53	↔		␣
3Ch	54	↔		␣
3Dh	55	↔		␣
3Eh	56	↔		␣
3Fh	57	↔		␣
40h	58	↔		␣
41h	59	↔		␣
42h	60	↔		␣
43h	61	↔		␣
44h	62	↔		␣
45h	63	↔		␣
46h	64	↔		␣
47h	65	↔		␣
48h	66	↔		␣
49h	67	↔		␣
4Ah	68	↔		␣
4Bh	69	↔		␣
4Ch	70	↔		␣
4Dh	71	↔		␣
4Eh	72	↔		␣
4Fh	73	↔		␣
50h	74	↔		␣
51h	75	↔		␣
52h	76	↔		␣
53h	77	↔		␣
54h	78	↔		␣
55h	79	↔		␣
56h	80	↔		␣
57h	81	↔		␣
58h	82	↔		␣
59h	83	↔		␣
5Ah	84	↔		␣
5Bh	85	↔		␣
5Ch	86	↔		␣
5Dh	87	↔		␣
5Eh	88	↔		␣
5Fh	89	↔		␣
60h	90	↔		␣
61h	91	↔		␣
62h	92	↔		␣
63h	93	↔		␣
64h	94	↔		␣
65h	95	↔		␣
66h	96	↔		␣
67h	97	↔		␣
68h	98	↔		␣
69h	99	↔		␣
6Ah	100	↔		␣
6Bh	101	↔		␣
6Ch	102	↔		␣
6Dh	103	↔		␣
6Eh	104	↔		␣
6Fh	105	↔		␣
70h	106	↔		␣
71h	107	↔		␣
72h	108	↔		␣
73h	109	↔		␣
74h	110	↔		␣
75h	111	↔		␣
76h	112	↔		␣
77h	113	↔		␣
78h	114	↔		␣
79h	115	↔		␣
7Ah	116	↔		␣
7Bh	117	↔		␣
7Ch	118	↔		␣
7Dh	119	↔		␣
7Eh	120	↔		␣
7Fh	121	↔		␣
80h	122	↔		␣
81h	123	↔		␣
82h	124	↔		␣
83h	125	↔		␣
84h	126	↔		␣
85h	127	↔		␣
86h	128	↔		␣
87h	129	↔		␣
88h	130	↔		␣
89h	131	↔		␣
8Ah	132	↔		␣
8Bh	133	↔		␣
8Ch	134	↔		␣
8Dh	135	↔		␣
8Eh	136	↔		␣
8Fh	137	↔		␣
90h	138	↔		␣
91h	139	↔		␣
92h	140	↔		␣
93h	141	↔		␣
94h	142	↔		␣
95h	143	↔		␣
96h	144	↔		␣
97h	145	↔		␣
98h	146	↔		␣
99h	147	↔		␣
9Ah	148	↔		␣
9Bh	149	↔		␣
9Ch	150	↔		␣
9Dh	151	↔		␣
9Eh	152	↔		␣
9Fh	153	↔		␣
A0h	154	↔		␣
A1h	155	↔		␣
A2h	156	↔		␣
A3h	157	↔		␣
A4h	158	↔		␣
A5h	159	↔		␣
A6h	160	↔		␣
A7h	161	↔		␣
A8h	162	↔		␣
A9h	163	↔		␣
AAh	164	↔		␣
ABh	165	↔		␣
ACh	166	↔		␣
ADh	167	↔		␣
ACh	168	↔		␣
AEh	169	↔		␣
AFh	170	↔		␣
B0h	171	↔		␣
B1h	172	↔		␣
B2h	173	↔		␣
B3h	174	↔		␣
B4h	175	↔		␣
B5h	176	↔		␣
B6h	177	↔		␣
B7h	178	↔		␣
B8h	179	↔		␣
B9h	180	↔		␣
BAh	181	↔		␣
BCh	182	↔		␣
Bdh	183	↔		␣
BEh	184	↔		␣
Bfh	185	↔		␣
C0h	186	↔		␣
C1h	187	↔		␣
C2h	188	↔		␣
C3h	189	↔		␣
C4h	190	↔		␣
C5h	191	↔		␣
C6h	192	↔		␣
C7h	193	↔		␣
C8h	194	↔		␣
C9h	195	↔		␣
CAh	196	↔		␣
CCh	197	↔		␣
Cdh	198	↔		␣
CEh	199	↔		␣
Cfh	200	↔		␣
D0h	201	↔		␣
D1h	202	↔		␣
D2h	203	↔		␣
D3h	204	↔		␣
D4h	205	↔		␣
D5h	206	↔		␣
D6h	207	↔		␣
D7h	208	↔		␣
D8h	209	↔		␣
D9h	210	↔		␣
DAh	211	↔		␣
DBh	212	↔		␣
DEh	213	↔		␣
DEh	214	↔		␣
DFh	215	↔		␣
E0h	216	↔		␣
E1h	217	↔		␣
E2h	218	↔		␣
E3h	219	↔		␣
E4h	220	↔		␣
E5h	221	↔		␣
E6h	222	↔		␣
E7h	223	↔		␣
E8h	224	↔		␣
E9h	225	↔		␣
EAh	226	↔		␣
EBh	227	↔		␣
ECh	228	↔		␣
Edh	229	↔		␣
EEh	230	↔		␣
Efh	231	↔		␣
F0h	232	↔		␣
F1h	233	↔		␣
F2h	234	↔		␣
F3h	235	↔		␣
F4h	236	↔		␣
F5h	237	↔		␣
F6h	238	↔		␣
F7h	239	↔		␣
F8h	240	↔		␣
F9h	241	↔		␣
FAh	242	↔		␣
FBh	243	↔		␣
FBh	244	↔		␣
FDh	245	↔		␣
FEh	246	↔		␣
FEh	247	↔		␣
FFh	248	↔		␣

Hex	Dec	Screen
2Eh	46	.
2Fh	47	/
30h	48	0
31h	49	1
32h	50	2
33h	51	3
34h	52	4
35h	53	5
36h	54	6
37h	55	7
38h	56	8
39h	57	9
3Ah	58	:
3Bh	59	!
3Ch	60	<
3Dh	61	=
3Eh	62	>
3Fh	63	?
40h	64	@
41h	65	A
42h	66	B
43h	67	C
44h	68	D
45h	69	E
46h	70	F
47h	71	G
48h	72	H
49h	73	I
4Ah	74	J
4Bh	75	K
4Ch	76	L
4Dh	77	M
4Eh	78	N
4Fh	79	O
50h	80	P
51h	81	Q
52h	82	R
53h	83	S
54h	84	T
55h	85	U
56h	86	V
57h	87	W
58h	88	X
59h	89	Y
5Ah	90	Z
5Bh	91	[

Hex	Dec	Screen
5Ch	92	\
5Dh	93	] ^
5Eh	94	
5Fh	95	
60h	96	-
61h	97	a
62h	98	b
63h	99	c
64h	100	d
65h	101	e
66h	102	f
67h	103	g
68h	104	h
69h	105	i
6Ah	106	j
6Bh	107	k
6Ch	108	l
6Dh	109	m
6Eh	110	n
6Fh	111	o
70h	112	p
71h	113	q
72h	114	r
73h	115	s
74h	116	t
75h	117	u
76h	118	v
77h	119	w
78h	120	x
79h	121	y
7Ah	122	z
7Bh	123	{ }
7Ch	124	
7Dh	125	
7Eh	126	
7Fh	127	Δ
80h	128	Ç
81h	129	U
82h	130	é
83h	131	à
84h	132	â
85h	133	ä
86h	134	ä
87h	135	ä
88h	136	é
89h	137	é

ASCII Character Chart

Hex	Dec	Screen
8Ah	138	e
8Bh	139	1
8Ch	140	1
8Dh	141	1
8Eh	142	A
8Fh	143	A
90h	144	E
91h	145	a
92h	146	R
93h	147	o
94h	148	o
95h	149	o
96h	150	Q
97h	151	U
98h	152	Y
99h	153	O
9Ah	154	U
9Bh	155	c
9Ch	156	E
9Dh	157	#
9Eh	158	R
9Fh	159	f
A0h	160	a
A1h	161	1
A2h	162	o
A3h	163	U
A4h	164	n
A5h	165	N
A6h	166	a
A7h	167	o
A8h	168	z
A9h	169	1
AAh	170	1
ABh	171	4
ACH	172	4
ADh	173	I
AEh	174	«
AFh	175	»
B0h	176	»
B1h	177	»
B2h	178	»
B3h	179	»
B4h	180	»
B5h	181	»
B6h	182	»
B7h	183	»
B8h	184	7
B9h	185	7
BAh	186	7
BBh	187	7
BCh	188	7
B Dh	189	7
BEh	190	f
B Fh	191	7
COh	192	L
C1h	193	T
C2h	194	T
C3h	195	T
C4h	196	T
C5h	197	T
C6h	198	T
C7h	199	T
C8h	200	T
C9h	201	T
CAh	202	T
CBh	203	T
CCh	204	T
CDh	205	T
CEh	206	T
CFh	207	T
D0h	208	T
D1h	209	T
D2h	210	T
D3h	211	T
D4h	212	T
D5h	213	T
D6h	214	T
D7h	215	T
D8h	216	T
D9h	217	T
DAh	218	T
DBh	219	T
DCh	220	T
DDh	221	T
DEh	222	T
DEh	223	T
DFh	224	T
E0h	225	T
E1h	226	T
E2h	227	T
E3h	228	T
E4h	229	T
E5h	230	T
E6h	231	T
E7h	232	T
E8h	233	T
E9h	234	T
EAh	235	T
EBh	236	T
ECh	237	T
EDh	238	T
EEh	239	T
EFh	240	T
F0h	241	T
F1h	242	T
F2h	243	T
F3h	244	T
F4h	245	T
F5h	246	T
F6h	247	T
F7h	248	T
F8h	249	T
F9h	250	T
FAh	251	T
FBh	252	T
FC h	253	T
FDh	254	T
FEh	255	T
FFh	256	T

Hex Dec Screen

Hex Dec Screen

Hex Dec Screen